ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308
УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

© С. П. Зубова[1], Е. В. Раецкая[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, пл. Университетская, 1
E-mail: spzubova@mail.ru
[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
E-mail: raetskaya@inbox.ru

Аннотация. Для линейной стационарной динамической системы с малым параметром при производной от функции состояния системы исследуется поведение функций управления и состояния при стремлении параметра к нулю. Формулируются полные условия равномерного стремления функций управления и состояния исходной системы к функциям управления и состояния предельной системы, а также условие наблюдения явления погранслоя вблизи краевых точек отрезка времени.

Ключевые слова: система управления; малый параметр; равномерное стремление; сингулярное возмущение; явление погранслоя

Введение

Рассматривается полностью управляемая динамическая система с малым параметром при производной от функции состояния:

$$\varepsilon\dot{x}(t,\varepsilon) = Bx(t,\varepsilon) + Du(t,\varepsilon) \tag{1}$$

на отрезке $[0,T]$ с условиями

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \quad x(T,\varepsilon) = x_T, \tag{2}$$

где $x(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$; B и D — матрицы соответствующих размеров; x_0, x_T — произвольно заданные элементы из $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Для допредельного уравнения (1) предельным ($\varepsilon = 0$) является уравнение :

$$0 = B\overline{x}(t) + D\overline{u}(t). \tag{3}$$

Решение $\overline{x}(t)$ уравнения (3) при любом $\overline{u}(t)$ не может, вообще говоря, удовлетворить условиям (2) в полном объеме. Но поскольку система (1) полностью управляема, то

$\overline{x}(t)$ может удовлетворить некоторой "части" этих условий, в этом случае система (1) является сингулярно возмущенной.

Всего возможны следующие случаи поведения решения $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

а) $x(t,\varepsilon)$ равномерно на $[0,T]$ стремится при $\varepsilon \to 0$ к некоторому решению $\overline{x}(t)$ предельного уравнения (3);

б) $x(t,\varepsilon)$ отличается от решения предельного уравнения на функцию погранслоя вблизи точек $t=0$ и $t=T$;

в) другие случаи, в том числе $\nexists\, lim\, x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, или $||x(t,\varepsilon)|| \to \infty$.

В случае а) соответствующая динамическая система малочувствительна к возмущению ε, груба, робастна.

Свойство б) означает:

1) $x(t,\varepsilon)$ равномерно стремится к $\overline{x}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ на любом отрезке $[t', t'']$, принадлежащем интервалу $(0,T)$;

2) $x(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows \overline{x}(t)$ при $\varepsilon \to 0$ на $[0,T]$, то есть или не стремится $x(t,\varepsilon)$ к $\overline{x}(t)$, или стремится, но неравномерно на всём отрезке $[0,T]$. То есть вблизи моментов $t=0$ и $t=T$ (в погранслое) $x(t,\varepsilon)$ достаточно сильно отличается от $\overline{x}(t)$.

В случае б) в задаче наблюдается явление погранслоя, задача является сингулярно возмущённой.

Случаи в) крайне нежелательны, на практике они ведут к разрушению реальной динамической системы.

В связи с этим в данной работе

— формулируются свойства коэффициентов B и D, необходимые и достаточные для равномерного стремления на $[0,T]$ вектор-функций $x(t,\varepsilon)$ и $u(t,\varepsilon)$ к $\overline{x}(t)$ и $\overline{u}(t)$ при $\varepsilon \to 0$;

— определяется максимальная "часть" условий (3), выполняемых вектор–функцией $\overline{x}(t)$ при отсутствии свойств B и D, обозначенных выше;

— для любого решения $\overline{x}(t)$ предельного уравнения (3), удовлетворяющего соответствующей "части" условий (2), утверждается существование управляющей функции $u(t,\varepsilon)$ для системы (1), при подстановке которой в (1), решение $x(t,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (2) и обладает свойством:

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t) + v(t,\varepsilon),$$

где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t=0$ и $t=T$.

Для исследований используются следующие свойства конечномерного оператора: если $C:\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^l$, то имеют место разложения $\mathbb{R}^s$ и $\mathbb{R}^l$ в прямые суммы

$$\mathbb{R}^s = \mathrm{Coim}\, C \dot{+} \mathrm{Ker}\, C, \quad \mathbb{R}^l = \mathrm{Im}\, C \dot{+} \mathrm{Coker}\, C, \tag{4}$$

где Ker C – ядро, нуль-пространство C; Im C – образ, множество значений C, Coker C — дефектное подпространство, Coim C – прямое дополнение к Ker C в $\mathbb{R}^s$.

Вводятся обозначения: $P(C)$ и $Q(C)$ – проекторы на Ker C и Coker C соответственно, отвечающие этим разложениям; $\widetilde{C}$ – сужение C на Coim C, $C^- =$

$\widetilde{C}^{-1}\big(I-Q(C)\big)$ – полуобратное отображение, I – тождественное отображение в соответствующем пространстве, далее это единичная матрица. При этом $P(C)=I-C^{-}C$ и $Q(C)=I-CC^{-}$.

Отображение C называют сюръективным, если его множество значений совпадает с $\mathbb{R}^l$, то есть если $Q(C)=0$.

Предельное уравнение (3) с помощью разложений (4) с $C=D$ расщепляется на уравнения в подпространствах Coker D и Coim D соответственно:

$$\begin{cases} Q(D)B\bar{x}(t)\equiv 0, \quad t\in[0,T],\\ \bar{u}(t)=-D^{-}B\bar{x}(t)+\bar{z}(t), \quad \forall\bar{z}(t)\in\operatorname{Ker}D. \end{cases} \tag{5}$$

Первое равенство в этой системе при $t=0$ не может выполняться для любых x_0, $x_T\in\mathbb{R}^n$, если $Q(D)B\neq 0$.

1. Случай $Q(D)B=0$

Для любой вектор-фукнции $\bar{x}(t)$ (в том числе и для удовлетворяющей условиям (2)) существует вектор-функция $\bar{u}(t)$, такая, что выполняется равенство (3). Её можно построить по второй формуле в (5). То есть справедлива

Лемма 1. *Существует $\bar{u}(t)$, при котором решение $\bar{x}(t)$ уравнения* (3) *обладает свойством*

$$\bar{x}(0)=x_0, \quad \bar{x}(T)=x_T, \quad \forall x_0,x_T\in\mathbb{R}^n$$

в том и только том случае, когда $Q(D)B=0$, то есть либо D — сюрьекция ($Q(D)=0$), либо Im $B\subseteq$ Im D.

2. Случай $Q(D)B=0$, $Q(D)\neq 0$

Случай $Q(D)B=0$, $Q(D)\neq 0$ невозможен, иначе допредельная система (1) была бы неуправляемой.

3. Случай сюръективного D

Допредельное уравнение (1) в случае сюръективного D для любого $x(t,\varepsilon)$ имеет решение $u(t,\varepsilon)$:

$$u(t,\varepsilon)=D^{-}\big(\varepsilon\dot{x}(t,\varepsilon)-Bx(t,\varepsilon)\big)+z(t,\varepsilon), \quad \forall z(t,\varepsilon)\in\operatorname{Ker}D.$$

Положим $x(t,\varepsilon)\equiv\bar{x}(t)$, $z(t,\varepsilon)\equiv\bar{z}(t)$, тогда $u(t,\varepsilon)\rightrightarrows\bar{u}(t)$, $\quad \varepsilon\to 0,\ t\in[0,T]$.

Теорема 1. *Случай а) поведения $x(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда D — сюрьекция. При выполнении этого условия для любой функции состояния $\bar{x}(t)\in C^1([0,T]\to\mathbb{R}^n)$ предельной системы* (3) *с условиями* (2) *существует управляющая функция $u(t,\varepsilon)$ допредельной системы* (1) *такая, что*

$$x(t,\varepsilon)\equiv\bar{x}(t)$$

и

$$u(t,\varepsilon)\rightrightarrows\bar{u}(t), \quad \varepsilon\to 0, \quad t\in[0,T].$$

Например, если

$$u(t,\varepsilon)=\frac{1}{T}D^{-}\Big(\varepsilon(-x_0+x_T)-B\big((T-t)x_0+tx_T\big)\Big),$$

то

$$x(t,\varepsilon)=\frac{T-t}{T}x_0+\frac{t}{T}x_T=\bar{x}(t)$$

и

$$u(t,\varepsilon)\rightrightarrows\bar{u}(t)=-\frac{1}{T}D^{-}B\big((T-t)x_0+tx_T\big).$$

4. Случай $Q(D)B\neq 0$

Для исследования системы (1) применяется метод каскадной декомпозиции [1–2], для чего вводятся в рассмотрение операторы

$$B_0=B,\ D_0=D,\ B_j=Q(D_{j-1})B_{j-1}Q(D_{j-1}),\ D_j=Q(D_{j-1})B_{j-1}\big(I-Q(D_{j-1})\big),$$

где $Q(D_{j-1})$ и $P(D_{j-1})$ — проекторы на Coker D_{j-1} и Ker D_{j-1}, соответственно, отвечающие разложениям

$$\operatorname{Im}D_{j-2}=\operatorname{Coim}D_{j-1}\dot{+}\operatorname{Ker}D_{j-1},\quad \operatorname{Coker}D_{j-2}=\operatorname{Im}D_{j-1}\dot{+}\operatorname{Coker}D_{j-1},\quad j=1,\,2\,\ldots.$$

Поскольку система (1) полностью управляемая, то $\exists p\in\mathbb{N}$ такое, что $Q(D_p)\equiv 0$, тогда Coker $D_{p-1}=$ Im D_p и

$$\mathbb{R}^n=\operatorname{Im}D\dot{+}\operatorname{Im}D_1\dot{+}\ldots\dot{+}\operatorname{Im}D_{p-1}\dot{+}\operatorname{Im}D_p.$$

Схожие разложения пространства $\mathbb{R}^n$ на прямые суммы подпространств получены другими методами в [3].

Функция состояния $\bar{x}(t)$ предельной системы (3) может удовлетворить лишь "части" условий (2), принадлежащих подпространству ImD_p:

$$\bar{x}(0)=Q(D_{j-1})x_0,\quad \bar{x}(t)=Q(D_{j-1})x_T. \tag{6}$$

Лемма 2. *Из полной управляемости системы* (1) *следует существование* $\bar{x}(t)$ *и* $\bar{u}(t)$, *удовлетворяющих равенству* (3) *и условиям* (6), $\forall x_0,\,x_T\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Если* $Q(D)B\neq 0$, *то для произвольной непрерывной управляющей функции* $\bar{u}(t)$ *предельной системы* (3) *существует управляющая функция* $u(t,\varepsilon)$ *полностью управляемой системы* (1) *с условиями* (2), *под воздействием которой функция состояния* $x(t,\varepsilon)$ *системы* (1), (2) *имеет вид*

$$x(t,\varepsilon)=\overline{x}(t)+v(t,\varepsilon),$$

где $\bar{x}(t)$ *— состояние предельной системы* (3), *соответствующее управляющей функции* $\bar{u}(t)$. *При этом*

$$u(t,\varepsilon)=\overline{u}(t)+w(t,\varepsilon)$$

и каждая из функций $v(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$ *является функцией погранслоя вблизи точек* $t=0$ и $t=T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zubova S.P., Raetskaya E.V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. № 7. P. 1189-1202. DOI: 10.1134/S0005117917070025.

2. *Zubova S.P.* Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86. № 3. P. 846-849.

3. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 375 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 11 мая 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, e-mail: spzubova@mail.ru

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, доцент кафедры математики, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Для цитирования: *Зубова С.П., Раецкая Е.В.* Исследование сингулярно возмущенной системы управления // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 303–308. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308

THE STUDY OF A SINGUlARlY PERTURBED CONTROL SYSTEM

S. P. Zubova[1), **E. V. Raetskaya**[2)]

[1)] Voronezh State University
1 University pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: spzubova@mail.ru
[2)] Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov
8 Timiryazev Str. , Voronezh 394087, Russian Federation
E-mail: raetskaya@inbox.ru

Abstract. The behavior of the control-functions and the state-functions (as the parameter tends to zero) for a linear stationary dynamical system with a small parameter at the system's state functions derivative is studied. Complete conditions are formulated for the uniform aspiration of the control functions and the state of the initial system to the control functions and the state of the limiting system are formulated. A conditions at which the boundary layer phenomena near the edge points of the time interval appears are also formulated.
Keywords: control system; small parameter; uniform tendention; singular disturbance; the boundary layer phenomenon

REFERENCES

1. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1189-1202. DOI: 10.1134/S0005117917070025.

2. Zubova S.P. Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 846-849.

3. Uonem M. *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya. Geometricheskiy podkhod* [Linear Multidimensional Control Systems. Geometric Approach]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 375 p. (In Russian).

Received 28 March 2018
Reviewed 11 May 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Zubova Svetlana Petrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: spzubova@mail.ru

Raetskaya Elena Vladimirovna, Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov, Voronezh, the Russian Federation, Associate Professor of the Mathematics Department, e-mail: raetskaya@inbox.ru

For citation: Zubova S.P., Raetskaya E.V. Issledovanie singulyarno vozmushchennoy sistemy upravleniya [The study of a singullarly perturbed control system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 303–308. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308 (In Russian, Abstr. in Engl.).